

İTÜ



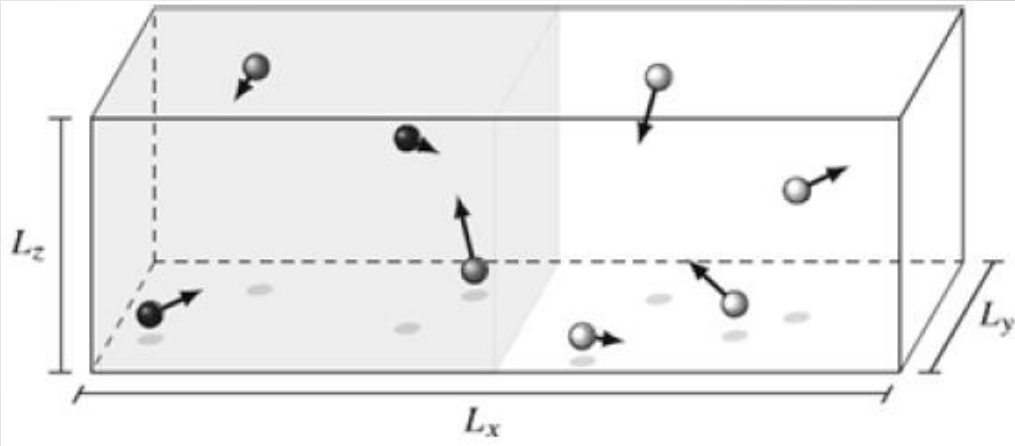
TÜBİTAK

C EURO^{4SEE}

Lattice Boltzmann Metodu'na Giriş
Alihan Atilla Çınar, Burakhan Şüküroğlu
İstanbul Teknik Üniversitesi

Parçacık yoğunluk fonksiyonu

- Parçacık yoğunluk fonksiyonu $f(x, \xi, t)$: Belirli bir anda uzaydaki belirli bir noktada ξ yönündeki ayırık hız vektörüne sahip olan hayali parçacık topluluğunun yoğunluğunu ifade eder.



- Parçacık yoğunluk fonksiyonu; aslında yoğunluğun genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilir. Parçacıkların hangi hızla hareket ettiğini de kapsar.

- Kutu içerisindeki gazın toplam ağırlığı $\int_V \rho d^3x$

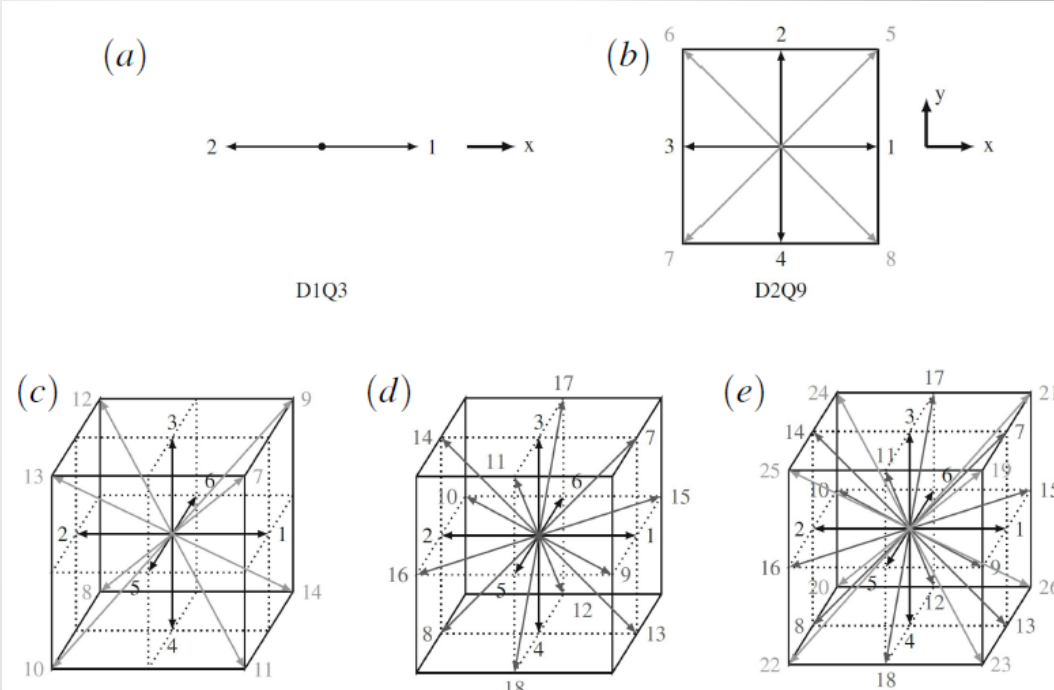
- Kutu içerisindeki gazın yoğunluğu $\rho(x, t) = \int f(x, \xi, t) d^3\xi$

- Kutunun sol yarısında kalan ve sağa doğru hareket eden parçacıkların kütlesi

$$\int_{x=0}^{x=L_x/2} \int_{\xi_x > 0} f d^3\xi d^3x$$

Hız Kümeleri

- Parçacık yoğunluk fonksiyonunun $f(x, \xi, t)$; LBM'de pratik olarak kullanılması hız kümeleri üzerinden olmaktadır. Hız kümeleri, parçacıkların gidebilecekleri yönleri ve hızların büyüklüğünü belirli ayırık değerler ile kısıtlar. Hız kümelerinin kullanılması ile parçacık yoğunluk fonksiyonu; $f_i(x, t)$ şeklinde ifade edilebilir. Hız kümeleri parçacık yoğunluk fonksiyonunun sahip olabileceği i indisi sayısını belirler.
- Hız kümeleri için DmQn notasyonu kullanılır. m değeri hız kümesinin sisteme kazandırdığı boyutu temsil ederken, n değeri parçacık dağılım fonksiyonunun kaç farklı ayırık hız vektörüne sahip olabileceğini gösterir.

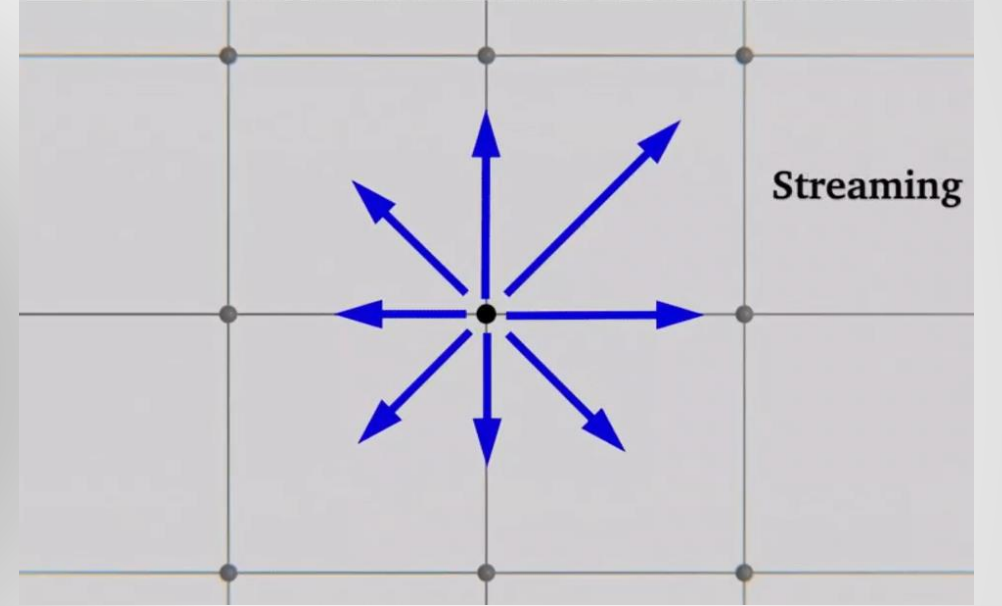


$f_i(x, t)$, bir kafes noktasındaki akışkanın tüm davranış bilgisini (kinetik enerjisi, momentumu vb.) içerir. Bu fonksiyonların toplamı bize akışkanın bilinen makroskobik özelliklerini verir.

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{x}, t), \quad \rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}, t)$$

Lattice Boltzmann Metodu'na Bakış

- LBM'de temel birim : hayali parçacık toplulukları
- Akış iki aşama ile temsil edilir: Akma ve Çarpışma
 - **Akma:** Bir kafes noktasından diğerine geçiş
 - **Çarpışma:** Bir kafes noktasına gelen parçacıkların birbiriyle etkileşimini temsil eder.
- Hayali parçacık toplulukları, **parçacık dağılım fonksiyonu** ile ifade edilir. LBM'de Boltzmann denklemi çözülerek parçacık dağılım fonksiyonları elde edilir.



- **Boltzmann Denklemi** ← *Chapman-Enskog analizi* → **Zayıf Sıkıştırılabilir Navier Stokes**

Lattice Boltzmann Denklemi

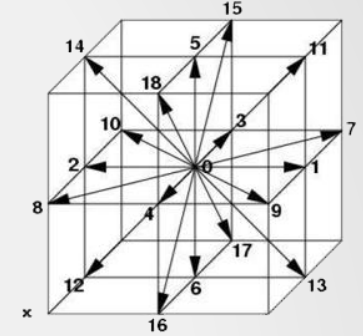
Lattice Boltzmann Equation

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}} + c_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = \Omega_f$$

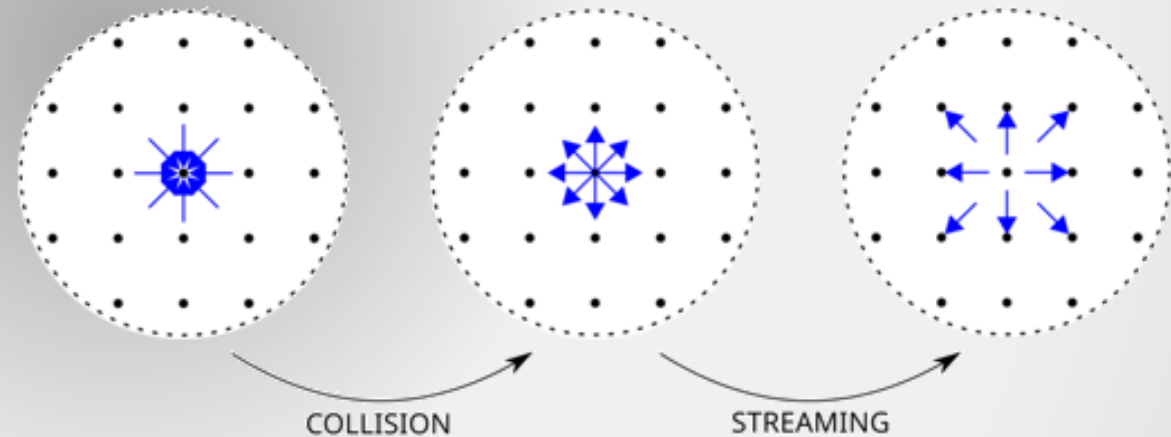
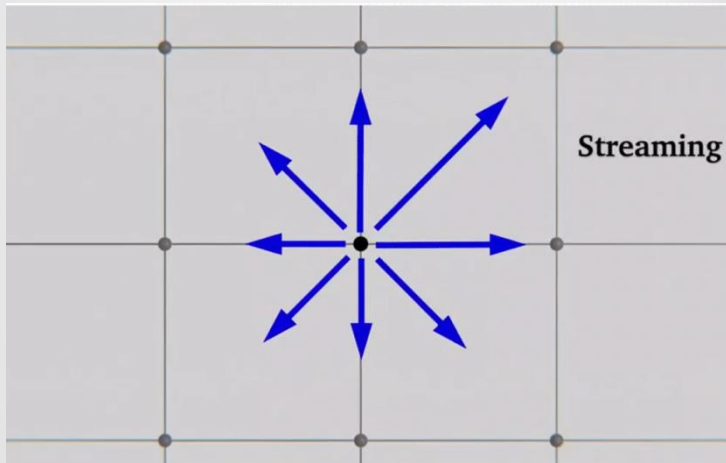
The rate of increase of
a particle

Stream

Collision



D3Q19 Lattice Structure



Çarpışma (Collision) – Single Relaxation Time

Single Relaxation Time (SRT)

- ❖ Single relaxation parameter for all particles
- ❖ Less numerical stability
- ❖ Simple & Low computational cost

$$f_{\alpha}(x + e_{\alpha}\delta, t + \delta) - f_{\alpha}(x, t) = \frac{1}{\tau} [f_{\alpha}^{eq}(x, t) - f_{\alpha}(x, t)], \quad \alpha = 0, 1, \dots, 18$$

$$f_{\alpha}^{eq} = w_{\alpha} \rho \left[1 + \frac{3(e_{\alpha} \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_{\alpha} \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right].$$

Çarpışma (Collision) – Multiple Relaxation Time

Multiple Relaxation Time (MRT)

- ❖ Different relaxation parameters for different moments
- ❖ More numerical stability
- ❖ Slightly higher computational cost

$$\left| f(x_i + e_\alpha \delta t, t + \delta t) \right\rangle - \left| f(x_i, t) \right\rangle = -\mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{S}} \left[\left| m(x_i, t) \right\rangle - \left| m^{(\text{eq})}(x_i, t) \right\rangle \right]$$

LBM ile Türbülans Modelleme

Filtering and modelling approaches are applied

MRT – LBM Equation $\left| f(x_i + e_\alpha \delta t, t + \delta t) \right\rangle - \left| f(x_i, t) \right\rangle = -\mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{S}} \left[\left| m(x_i, t) \right\rangle - \left| m^{(eq)}(x_i, t) \right\rangle \right]$

❖ Space Filtering

- High-wave-length part of the density distributions are filtered.

$$\bar{\Delta} = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{1/3}$$

❖ Small scale structures are modeled with effective collision term.

$$\nu + \nu_\tau = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s_9} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s_{13}} - \frac{1}{2} \right)$$

Smagorinsky Model

$$\nu_\tau = C_s \bar{\Delta}^2 |S|$$

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

MRT-LBM-LES Equation $\left| \bar{f}(x_i + e_\alpha \delta t, t + \delta t) \right\rangle - \left| \bar{f}(x_i, t) \right\rangle = -\mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{S}} \left[\left| m(x_i, t) \right\rangle - \left| m^{eq}(x_i, t) \right\rangle \right]$